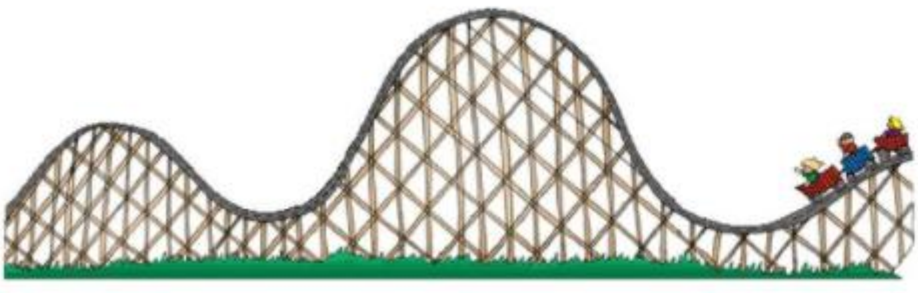
MATEMÁTICA 5TO

Prof. Christian Covello
Prof. Mariano Sánchez

Unidad 1
Función polinómica. Ecuación polinómica.



CONTENIDOS:

☞ TEOREMA DEL RESTO . REGLA DE RUFFINI.

☞ FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS.

☞ ECUACIONES POLINÓMICAS.

☞ FUNCIÓN POLINÓMICA. ANÁLISIS COMPLETO

1. Extrae factor común:

a. $3x^4 - 15x^5 + 6x^2 =$

b. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^8 - \frac{7}{3}x^2 =$

c. $\frac{16}{5}x^6 - \frac{8}{15}x^5 + \frac{24}{35}x^4 - \frac{7}{25}x^3 =$

d. $ax^2 + a^3x^3 - ax^5 =$

e. $\frac{2}{3}x^5 - 8x^3 + \frac{4}{5}x^7 =$

f. $6m^3p - 2m^2p^2 =$

2. Escribe como producto los siguientes polinomios de grado 2.

a. $3x^2 - 1 + \frac{1}{2}x =$

b. $2x^2 + x + \frac{1}{8} =$

c. $5 - 21x + 4x^2 =$

d. $-x^2 + 13x - 42 =$

3. Aplica cuando sea posible el método diferencia de cuadrados, y escribe como producto los siguientes polinomios.

a. $9x^2 - 1 =$

b. $m^6 - 64 =$

c. $25 + 4x^2 =$

d. $81 - 16x^4 =$

d. $x^3 - 4$

4. Aplica factor común por grupos a los siguientes polinomios.

$A(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ $D(x) = 4x^3 + 8x^2 + 8x + 16$

$B(x) = 2x^3 - 6x^2 + x - 3$ $E(x) = x^6 + x^5 - 2x^4 + x^2 + x - 2$

$C(x) = 3x^5 + x^4 - 3x - 1$ $F(x) = 3x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 3x^2 + 12x - 9$

5. Escribe en forma factorizada los siguientes polinomios aplicando más de un caso de factoreo si es necesario. Luego calculen las raíces.

a. $x^3 - x =$
b. $x^7 - 81x^3 =$
c. $x^3 - x^2 - 6x =$
d. $3x^3 - 18x^2 + 27x =$
e. $2x^5 - 32x =$

6. Determina las raíces por aplicación del Teorema de Gauss, luego utiliza la regla de Ruffini para factorizar los polinomios dados a continuación:

$P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 6x + 5$ $S(x) = 3x^3 - 14x^2 + 17x - 6$

7. Utilizando los métodos de factorización trabajados, escribe los siguientes polinomios como producto de factores primos. Luego indique su conjunto de ceros y multiplicidad.

$A(x) = -3x^3 + 15x^2 - 24x + 12$ $B(x) = -11x + 2x^3 - 3x^2 + 6$

$C(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$ $D(x) = 2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4$

$E(x) = x^4 - x^2$ $F(x) = \frac{2}{9}x^3 - \frac{16}{9}$

8. Marca con una X la respuesta correcta

a. La ecuación $2(x+2)(2x-7)(x-7) = 0$ tiene por solución

$\{`-7; 2; 7\}$ $\left\{-\frac{7}{2}; -2; 7\right\}$ $\left\{-2; \frac{7}{2}; 7\right\}$ $\{-7; -2; 7\}$

b. La ecuación $2(-x+3)(2x+6)(3x-9) = 0$ tiene por solución

$\{`-6; -3; 3\}$ $\{-3; 3; 9\}$ $\{-3; 6; 9\}$ $\{-3; 3\}$

c. La ecuación $2x^3(2x-4)(x+1) = 0$ tiene por solución

$\{-1; 4\}$ $\{-2; -1; 2\}$ $\{-1; 0; 2\}$ $\{-1; 0; 4\}$

d. La ecuación $4(x^2+4)(x^2+9) = 0$ tiene por solución

$\{`-3;-2;2;3\}$ $\qquad$ $\emptyset$ $\qquad$ $\{-3;2;4\}$ $\qquad$ $\{-3;2\}$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a. $x^2.(x^4+16)=32x^2$

b. $x^3.(x+1)=x^2-x+2$

c. $-11x+2x^2.(x-1)=x^2-6$

10. Grafica aproximadamente los siguientes polinomios factorizados indica las raíces y la multiplicidad de cada una de ellas. Además, realiza cada gráfica aproximada.

$$Q(x)=-2.(x+2)^2.(x-1)^3.x$$

$$R(x)=\frac{1}{2}(x+1).(x-1).(x-4)$$

11 Grafica las siguientes funciones polinómicas e indica: ordenada, forma factorizada, raíces y orden de multiplicidad de cada raíz, conjunto de positividad y negatividad

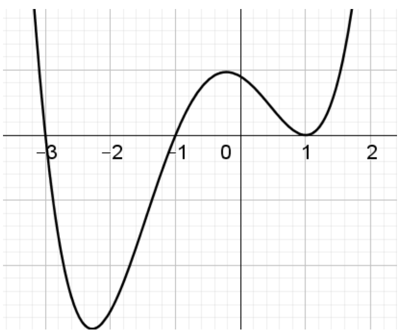
a. $f(x)=x^3+x^2-9x-9$

b. $f(x)=2x^3-10x^2+14x-6$

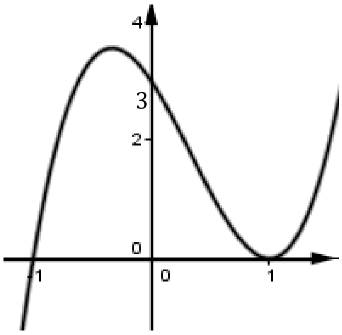
12. Encuentra la expresión factorizada de la función polinómica $f(x)$ y luego realiza la gráfica aproximada sabiendo que:

- $C^0(f)=\{-2\,;\,-1\,,1\}$
- $f(x)$ es de grado 7.
- -2 es raíz simple y -1 tiene orden de multiplicidad 4. (no olvides la multiplicidad de x=1)
- $f(0)=1$

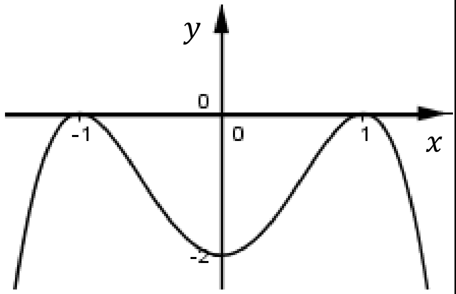
13. Escribe una la función factorizada $g(x)$ de grado 4 que corresponda al siguiente gráfico de una función polinómica, sabiendo que $g\left(\frac{3}{2}\right)=1$



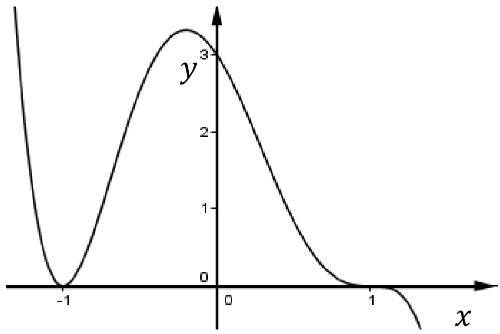
14. Escribe la fórmula de cada una de las funciones cuyos gráficos son:



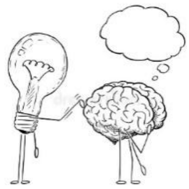
Grado 3



Grado 4



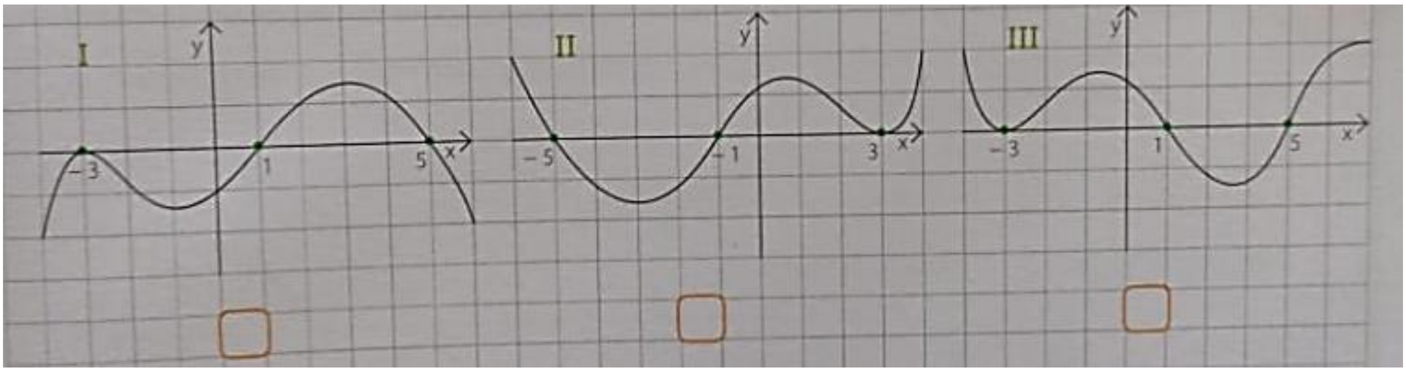
Grado 3



AUTOEVALUACIÓN

1. Elige cuál de los siguientes gráficos corresponden a función $f(x)$ JUSTIFICANDO debidamente tu decisión.

$$f(x) = (x-5)(x-1)(x+3)^2$$



2. Encuentra la función $f(x)$ que cumple con las siguientes características:

☞ f es de grado 4

☞ $C^0(f) = \{-3; 1; 5\}$

☞ -3 es raíz simple y 1 es raíz doble.

☞ $f(2) = 15$

3. Encuentra el conjunto solución.

$$x^3.(x^2-12) - 81 + 12x^3 = 81.(x-1)$$

4. Dada la $g(x) = 2x^3 - 4x^2 - 14x - 8$

a. Encuentra analíticamente raíces y ordenada.

b. Realiza la gráfica aproximada de $g(x)$

c. Determina $C^+(g)$

RESPUESTAS

1. a. $x^2.(3x^2 - x^3 + 6)$ b. $\frac{1}{3}x^2.(x + 5x^6 - 7)$

   c. $\frac{1}{5}x^3(16x^4 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{24}{7}x - \frac{7}{5})$ d. $ax^2.(1 + a^2x - x^3)$

   e. $2x^3\left(\frac{1}{3}x^2 - 4 + \frac{2}{5}x^4\right)$ f. $2m^2p(3m - p)$

2. a. $3.\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)$ b. $2.\left(x + \frac{1}{4}\right)^2$

   c. $4.(x - 5).\left(x - \frac{1}{4}\right)$ d. $-(x - 7)(x - 6)$

3. a. $(3x + 1)(3x - 1)$ b. $(m^3 - 8)(m^3 + 8)$

   c. No se puede d. $(9 + 4x^2)(9 - 4x^2)$

   e. No se puede

4. $A(x) = (x^2 + 1)(x - 1)$ $D(x) = (4x^2 + 8)(x + 2)$

   $B(x) = (2x^2 + 1)(x - 3)$ $E(x) = (x^4 + 1)(x^2 + x - 2)$

   $C(x) = (x^4 - 1)(3x + 1)$ $F(x) = (3x^4 - 3)(x^2 - 4x + 3)$

5. a. $x(x + 1)(x - 1)$ $C^0 = \{-1; 0; 1\}$

   b. $x^3.(x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$ $C^0 = \{-3; 0; 3\}$

   c. $x(x - 3)(x + 2)$ $C^0 = \{-2; 0; 3\}$

   d. $3x.(x - 3)^2$ $C^0 = \{0; 3\}$

   e. $2x(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4)$ $C^0 = \{-2; 0; 2\}$

6.

$$P(x) = 2.\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 5)(x + 1) \qquad S(x) = 3.\left(x - \frac{2}{3}\right).(x - 3).(x - 1)$$

7.

$A(x) = -3(x - 1)(x - 2)^2$ $B(x) = 2.(x - 3)(x + 2).\left(x - \frac{1}{2}\right)$

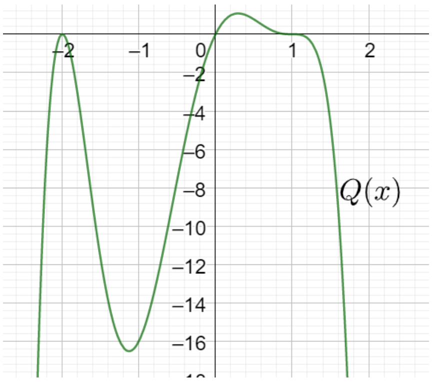
$C(x) = x^2.(x - 2)(x - 1)$ $D(x) = 2.(x + 1)(x - 2)(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

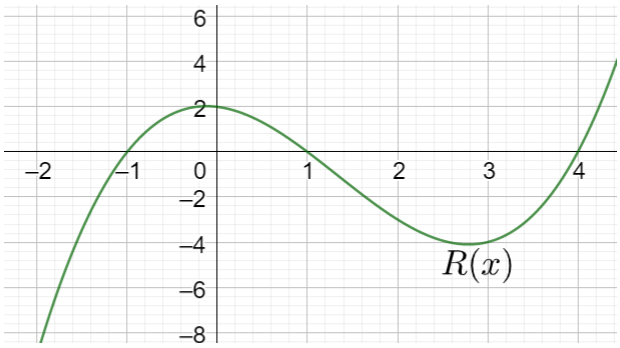
$E(x) = x^2(x + 1)(x - 1)$ $F(x) = \frac{2}{9}(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

8. a. $\left\{-2; \frac{7}{2}; 7\right\}$ b. $\{-3; 3\}$ c. $\{-1; 0; 2\}$ d. $\varnothing$

9. a. $S = \{-2; 0; 2\}$ b. $S = \{-2; 1\}$ c. $S = \left\{-2; \frac{1}{2}; 3\right\}$

10.





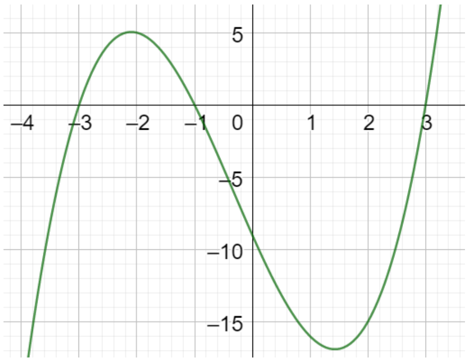
11. a. $f(0) = -9$

$f(x) = (x+1)(x+3)(x-3)$

$C^0(f) = \{-3; -1; 3\}$

$C^+(f) = (-3; -1) \cup (3; \infty)$

$C^-(f) = (-\infty; -3) U (-1; 3)$



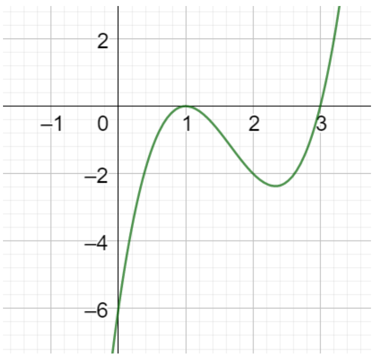
b. $f(0) = -6$

$f(x) = 2(x-1)^2(x-3)$

$C^0(f) = \{1; 3\}$

$C^+(f) = (3; \infty)$

$C^-(f) = (-\infty; 1) \cup (1; 3)$



12. $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x+1)^4(x-1)^2$

13. $g(x) = \frac{16}{45}(x+3)(x+1)(x-1)^2$

14. $f(x) = 3(x-1)^2(x+1)$

$f(x) = -2(x+1)^2(x-1)^2$

$f(x) = -3(x+1)^2(x-1)$

RESPUESTAS AUTOEVALUACIÓN

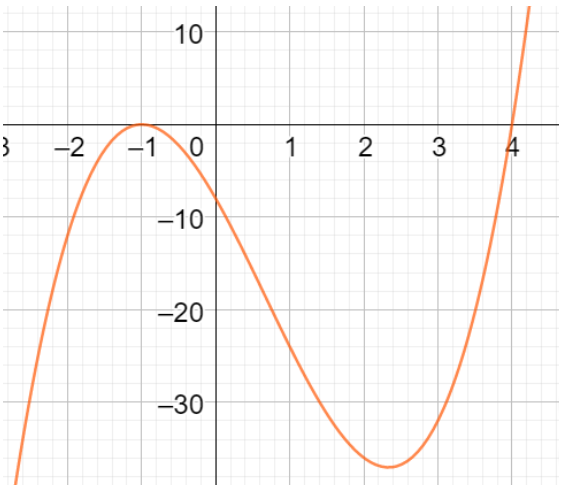
1. Opción III

2. $f(x) = \frac{5}{9}(x+3)(x-1)^2(x-5)^2$

3. $S = \{-3; 0; 3\}$

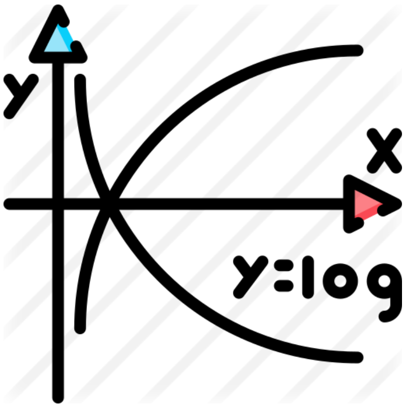
4. a. $C^0(g) = \{-1; 4\}$ $g(0) = -8$ $C^+(g) = (4; \infty)$

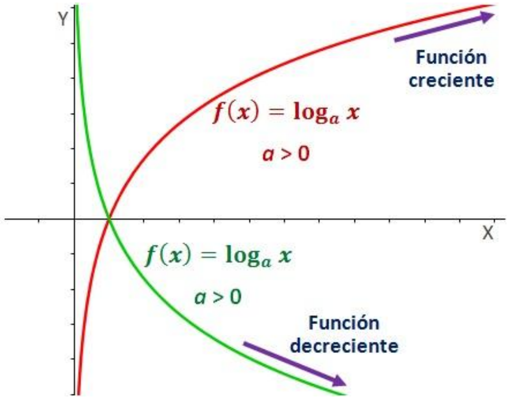
   b.



Unidad 2

Logaritmos / Función logarítmica





CONTENIDOS:

- ☞ LOGARITMOS DECIMALES Y NATURALES. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS.
- ☞ ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN.
- ☞ FUNCIÓN LOGARÍTMICA. REPRESENTACIÓN GRÁFICA. PARÁMETROS.
- ☞ ESTUDIO COMPLETO DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

---

1. Escribe las siguientes igualdades en forma exponencial:

   a. $\log_2 256 = 8$

   b. $log\,\frac{1}{100} = -2$

   c. $\log_{1/3} 27 = -3$

   d. $\ln 1 = 0$

2. Calcula los siguientes logaritmos aplicando la definición.

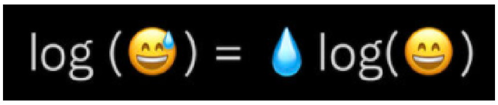
a. $\log_8 64 =$	b. $\ln e =$	c. $\log\ \ 10 =$
d. $\log_{\sqrt{3}} 1 =$	e. $\log_{10} 100.000 =$	f. $\log_4 \dfrac{1}{16} =$
g. $\log_{\sqrt{5}} \sqrt{5} =$	h. $\log\ \ 0{,}0001 =$	i. $\log_7 \dfrac{1}{343} =$

Propiedades de los logaritmos

Propone un ejemplo para verificar cada una de las siguientes propiedades:

Sabiendo que $x, y \epsilon \mathbb{R}, a, b \epsilon \mathbb{R}^{+} - \{1\}$

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a =$
- $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a (x : y) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a (x^n) = \text{n}.\log_a x$



- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ (Propiedad **Cambio de base**)
- $\log_a x = \log_{a^n} x^n$

3. Halla con la calculadora los siguientes logaritmos, usando solamente logaritmo decimal.

a. $\log_5 28 =$ b. $\log_3 17 =$ c. $\log_4 27 =$

4. Calcula aplicando propiedades:

a.	$\log_{64} 8 =$	b.	$\ln \sqrt{e} =$	c.	$\log_2 \sqrt[4]{32} =$
d.	$\log_{81} 3 =$	e.	$\log_{\sqrt{3}} 27 =$	f.	$\log_{\sqrt{b}} b^3 =$
g.	$\log 50 + \log 2 =$	h.	$\log_3 \frac{1}{7} + \log_3 63 =$	i.	$\log_2 (16.64) =$
j.	$\log_2 20 - \log_2 5 =$	k.	$log\, 20 + 2\, log\, 5 + \log 2 =$	l.	$\ln e^7 - \ln e^{-4} =$
m.	$2 \log 30 - \log 90 =$	n.	$\log 250 + \log 40 =$	o.	$\log_2 \frac{1}{8} + \log_{\frac{1}{7}} 7 =$

5. Si $\log_b p = 3{,}6$ con $b \in \mathbb{R}^{+} - \{1\}$ y $p \in \mathbb{R}^{+}$; calcular aplicando propiedades.

a.	$\log_b (p.b)$	e.	$\log_b \frac{1}{p}$
b.	$\log_b (b:p)$	f.	$\log_b (b.p)^3$
c.	$\log_b p^5$	g.	$\log_b (p^4.b^2)$

d. $\log_b \sqrt[6]{p}$

h. $\log_b \sqrt[4]{p^3 : b^5}$

6. Expresar de tal modo que el término log aparezca una sola vez, siendo x, y y z números reales positivos.

a. $\frac{1}{4} log\, x + 2\, log\, y$

b. $log(x^{log\, x})$

7. Completa las siguientes proposiciones para que resulten verdaderas. Justifica con el desarrollo.

a. El valor de $m \in \mathbb{R}$ tal que $\log_m 9 + \frac{1}{3}\log_m 3 = \frac{7}{3}$ es $m =$………

b. Si $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, entonces $2\log_a 4 + \frac{1}{2}\log_a 25 - \frac{2}{3}\log_a 8$ expresado como un solo logaritmo es……

c. Si $\log_b a = 1{,}5$ con $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}\ y\ a \in \mathbb{R}^+$, entonces el valor de $\log_b \sqrt[3]{a^2 : b}$ es………

8. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a. $\log(x+3) - \log(x-1) = \log 2$

b. $(2.\log_2 x - 3) : 3 = 1$

c. $\log_8 x + \log_8 x^2 = -1$

d. $\log(x+2) = 1$

e. $7.\log x = \log 100$

f. $\log(2x+6) - \log(x+1) = \log 3$

g. $\log_{1/3}(-x+4) = -2$

h. $\log(x^2+1) = 1$

i. $2.\log_3 x + 4 = 0$

j. $\log(x+1) + \log(x-2) = \log 4$

k. $10^{x+1} = 15$

l. $10^{5x-1} = 7$

m. $3^{x-1} = 0{,}1$

9. Calcula todos los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes ecuaciones:

a. $10\log_5 x - 5\log_5 x + 5 = 0$

b. $\log_x(3x+10) = 2$

c. $\log[3 + 2\log(1+x)] = 0$

d. ${\log_2}^2 x - \log_2 x - 2 = 0$

e. ${\log_2}^2 x - 5\log_2 x = 0$

f. $3.\ln x - \ln x = \ln 9$

g. ${\log_5}^2 x - 2\log_5 x - 3 = 0$

h. $\log x^2 + \log^2 x = 3$

i. $\ln x^3 - \ln\sqrt{x} = \frac{5}{2}$

j. $2 = \log_3 x + 2\log_9 x$

k. $\dfrac{\log_4 x^2 - \log_{1/2} x}{\log_2 \sqrt{x}} = 4$

l. $\log_{\sqrt{2}} x^{-1} + 1 = -\log_4 x^3$

Definición: Se define ***función logarítmica*** a toda función de la forma $\boldsymbol{f(x) = \log_a x}$, con

$$x \in \mathbb{R}^+ \quad \wedge \quad a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}\,.$$

Recordar que $y = \boldsymbol{\log_a x} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{a^x = y}$

El dominio de la función logarítmica es el conjunto de todos los reales positivos, es decir

$$Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} / \ x > 0\}$$

10. Determina el dominio de las funciones en cada uno de los siguientes casos.

a. $f(x) = \log_2(x+1)$

b. $g(x) = \log_2 2x$

c. $m(x) = \log_2(-x)$

d. $t(x) = \log_2(3-x)$

e. $r(x) = \log_2(2x-4)$

f. $h(x) = \log_2(5-3x)$

11. Grafica las siguientes funciones y halla:

a. El dominio y la imagen de cada una.

b. Las raíces en forma analítica.

c. Las ecuaciones de las asíntotas.

d. Analiza el crecimiento o decrecimiento de cada una.

$f_1(x) = \log_2(x+2)$

$f_2(x) = \log_2(x-4)$

$f_3(x) = \log_{1/2}(x+4)$

$f_4(x) = \log_3(3x+3)$

$f_5(x) = \log_{1/3}(x+3) + 1$

$f_6(x) = \ln(x+1)$

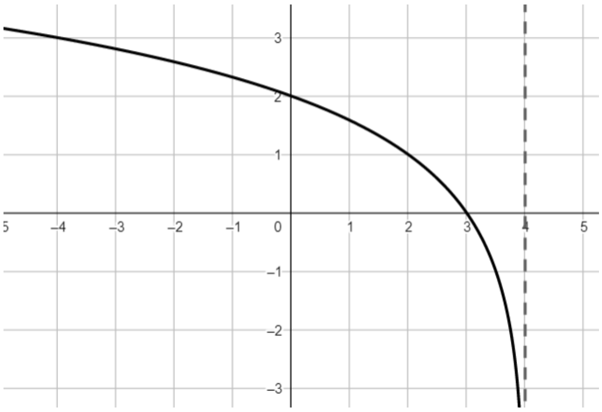
12. Determina analíticamente a y c para que la función de la forma $f(x) = \log_a(x + c)$ pase por los siguientes puntos.

a. $(5\,;\ 1)$ y $(17\,;\ 2)$

b. $(3\,;\ 1)$ y $(23\,;\ 2)$

AUTOEVALUACIÓN

1. Dada la siguiente gráfica de la función logarítmica $f(x)$, completa:



a. $Dom\ f$:

b. $Im\ f$:

c. $C^0(f) =$

d. $f(0) =$

e. $IC\ f$:

f. $C^-(f) =$

g. $ID\ f$:

2. Dada la función $f(x) = \log_3(x + 3)$,

a. Halla analíticamente $Dom\ g$ y la asíntota vertical.

b. Encuentra raíz y ordenada, realizando el planteo correspondiente.

c. Busca puntos extra y realiza la gráfica aproximada de $g(x)$

3. Encuentra en cada caso lo pedido:

a. El dominio de $\log(-3x - 6)$

b. El dominio de $\log_5(x + 1) - 5$

c. La raíz de la función $\log(x - 2)$

d. La ordenada de $ln(x + e^3)$

e. La función de la forma $f(x) = \log_a(x + c)$ pase por $A = (30; 2)\ y\ \ B = (-26; 1)$

4. Dada la siguiente función logarítmica $\mathrm{f(x)} = \log_2(4x + 8)$, encuentra:

a. $Dom\ f$:

b. $Im\ f$:

c. $AV\ (f) =$

d. $AH\ (f)$:

e. $Ordenada$

5. Utilizando propiedades, encuentra el valor numérico de $\log_2\left(16.\sqrt{8}\right)^5$

6. Encuentra en cada caso el conjunto solución.

a. $\frac{2\log_2 x - 3}{3} = 1$

b. $\log_{k+1} 8 + \log_{k+1} 6 = 1$

c. $12^{3x+1} = 15$

d. $\log_5{}^2 x - 2 = \log_5 x$

e. $\log_4 x + 3\log_4 x - 2 = 0$

f. $\log_x(3x + 18) = 2$

g. $\log_3 x^2 + \log_{1/3} x - \log_9 \sqrt{x} = -3/2$

Respuestas

2. a. 2 b. 1 c. 1
   d. 0 e. 5 f. -2
   g. 1 h. -4 i. -3
3. a. $2{,}07$ b. $2{,}57$ c. $2{,}377$
4. a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{1}{2}$ c. $\frac{5}{4}$
   d. $\frac{1}{4}$ e. 6 f. 6
   g. 2 h. 2 i. 10
   j. 2 k. 3 l. 11
   m. 1 n. 4 o. -4
   g. 1 h. -4 i. -3
5. a. $4{,}6$ e. $-3{,}6$
   b. $-2{,}6$ f. $13{,}8$
   c. 18 g. $16{,}4$
   d. $0{,}6$ h. $1{,}45$
6. a. $\log(\sqrt[4]{x}.y^2)$ *b.* $(\log x)^2$
7. a. $m = 3$ b. $\log_a 20$ c. $\frac{2}{3}$
8. a. $S = \{5\}$ b. $S = \{8\}$
   c. $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ d. $S = \{8\}$
   e. $S = \{\sqrt[7]{100}\}$ f. $S = \{3\}$
   g. $S = \{-5\}$ h. $S = \{-3; 3\}$

i. $S = \left\{\frac{1}{9}\right\}$

j. $S = \{3\}$

k. $S = \{0{,}17\}$

l. $S = \{0{,}369\}$

m. $S = \{-1{,}095\}$

9.

a. $S = \left\{\frac{1}{5}\right\}$

b. $S = \{5\}$

c. $S = \left\{-\frac{7}{10}\right\}$

d. $S = \left\{\frac{1}{2}; 4\right\}$

e. $S = \{1; 32\}$

f. $S = \{3\}$

g. $S = \left\{\frac{1}{5}; 125\right\}$

h. $S = \left\{\frac{1}{1000}; 10\right\}$

i. $S = \{e\}$

a. $S = \{3\}$

b. $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

l. $S = \{4\}$

10.

a. $Dom\ f: (-1; \infty)$

b. $Dom\ g: (0; \infty)$

c. $Dom\ m: (-\infty; 0)$

d. $Dom\ t: (-\infty; 3)$

e. $Dom\ r: (2; \infty)$

f. $Dom\ h: \left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$

11.

$Dom\ f_1 = (-2; \infty)$

$Im\ f_1 = \mathbb{R}$

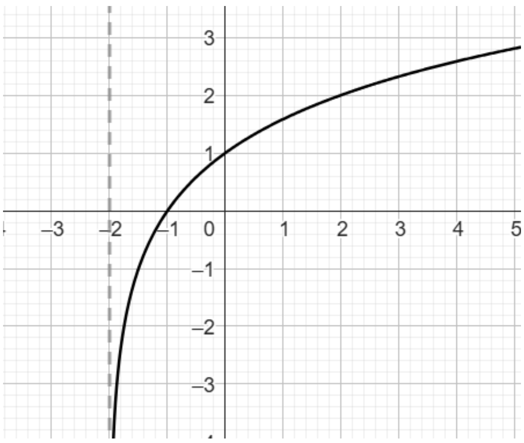
$Asíntota\ vertical\ en\ x = -2$

$C^0(f_1) = \{-1\}$

$f_1(0) = 1$

$IC(f_1) = (-2; \infty)$

$ID(f_1) = \emptyset$



$Dom\ f_2 = (4; \infty)$

$Im\ f_2 = \mathbb{R}$

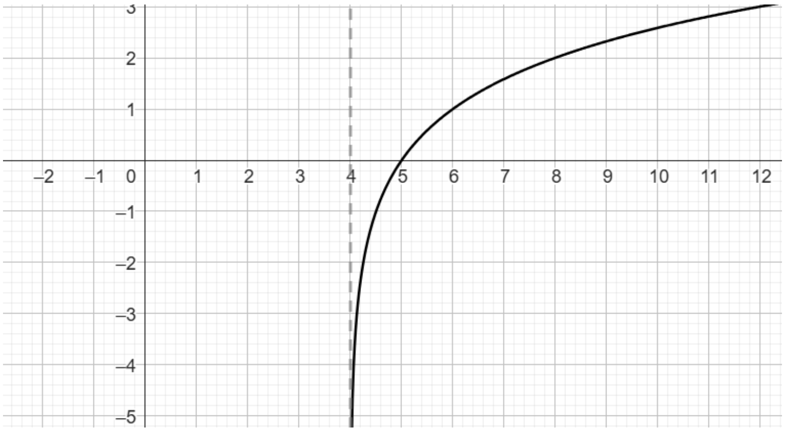
$Asíntota\ vertical\ en\ x = 4$

$C^0(f_2) = \{5\}$

$f_2(0)$ no existe

$IC(f_2) = (4; \infty)$

$ID(f_2) = \emptyset$



$Dom\ f_3 = (-4; \infty)$

$Im\ f_3 = \mathbb{R}$

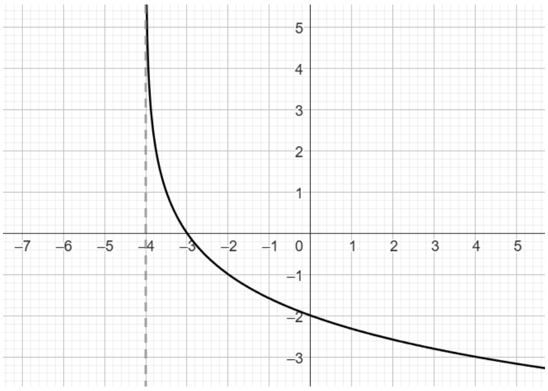
$Asíntota\ vertical\ en\ x = -4$

$C^0(f_3) = \{-3\}$

$f_3(0) = -2$

$IC(f_3) = \emptyset$

$ID(f_3) = (-4; \infty)$



$Dom\ f_4 = (-1; \infty)$

$Im\ f_4 = \mathbb{R}$

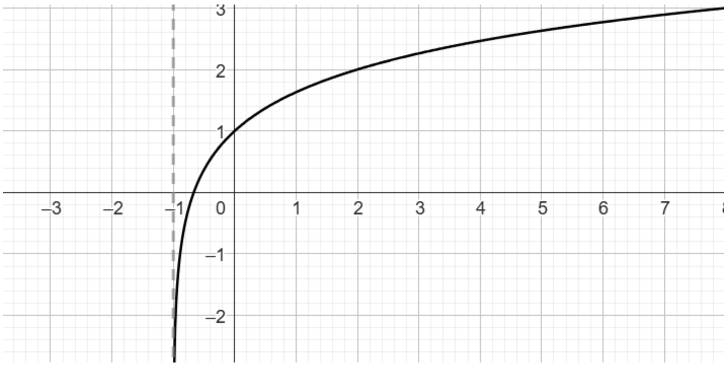
$Asíntota\ vertical\ en\ x = -1$

$C^0(f_4) = \{-1\}$

$f_4(0) = 1$

$IC(f_4) = (-1; \infty)$

$ID(f_4) = \emptyset$



$Dom\ f_5 = (-3; \infty)$

$Im\ f_5 = \mathbb{R}$

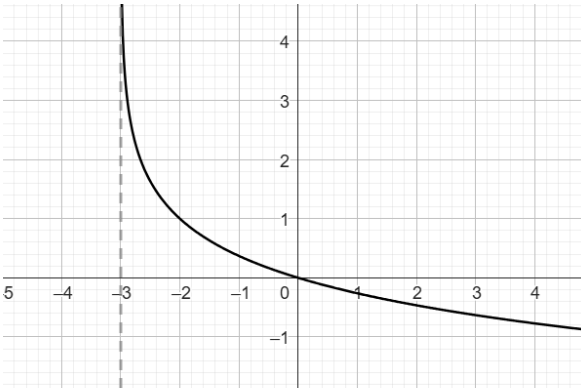
$Asíntota\ vertical\ en\ x = -3$

$C^0(f_5) = \{0\}$

$f_5(0) = 0$

$IC(f_5) = \emptyset$

$ID(f_5) = (-3; \infty)$



$Dom\ f_6 = (-1;\infty)$

$Im\ f_6 = \mathbb{R}$

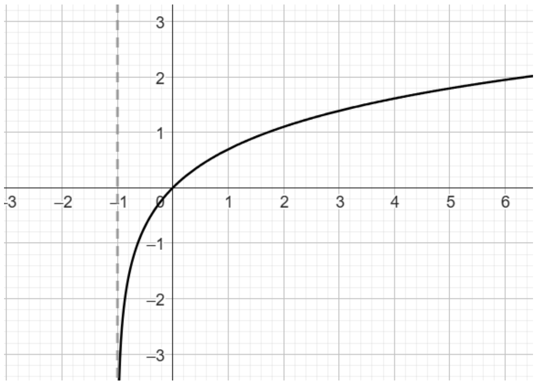
$Asíntota\ vertical\ en\ x = -1$

$C^0(f_6) = \{0\}$

$f_6(0) = 0$

$IC(f_6) = (-1;\infty)$

$ID(f_6) = \emptyset$



12. a. $f(x) = \log_4(x-1)$ b. $f(x) = \log_5(x+2)$

RESPUESTAS AUTOEVALUACIÓN

1. a. $Dom\ f: (-\infty; 4)$ b. $Im\ f: \mathbb{R}$

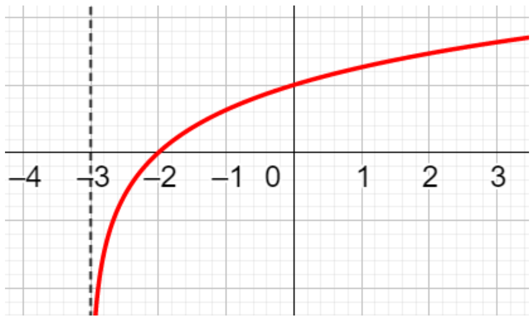
   c. $C^0(f) = \{3\}$ d. $f(0) = 2$

   e. $IC\ f: \emptyset$ f. $C^-(f) = (3;4)$

   g. $ID\ f: (-\infty; 4)$

2. a. $Dom\ g: (-3;\infty)$ AV en $x = -3$

   b. $C^0(f) = \{-2\}$ $f(0) = 1$



3.

   a. $Dom: (-\infty; -2)$ b. $Dom: (-1;\infty)$

   c. $x = 3$ d. 3

4. a. $Dom\ f: (-2;\infty)$ b. $Im\ f: \mathbb{R}$ c. $AV\ (f)\ en\ x = -2$

   d. $AH\ (f) no\ tiene$ e. $f(0) = 3$

5. 55/2

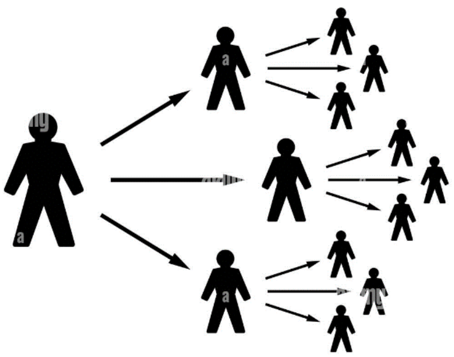
6. Encuentra en cada caso el conjunto solución.

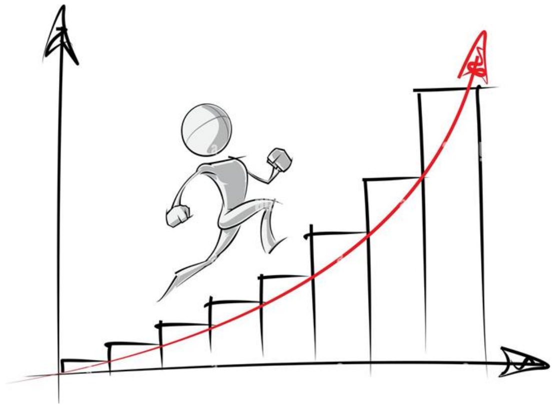
a. $S = \{8\}$ b. $k = 47$ c. $S = \{0{,}0299\}$

d. $S = \left\{\frac{1}{5}, 25\right\}$ e. $S = \{2\}$ f. $S = \{6\}$

g. $S = \left\{\frac{1}{9}\right\}$

Unidad 3
Función exponencial





CONTENIDOS:

- ☞ Función exponencial. Representación gráfica. Parámetros.
- ☞ Estudio completo de la función exponencial
- ☞ Ecuaciones exponenciales. Sistemas de ecuaciones.
- ☞ Problemas de aplicación.

---

1. Las amebas son seres unicelulares que se reproducen partiéndose en dos (bipartición). Esto se realiza más o menos rápidamente según las condiciones del medio en que se encuentran (cultivo). Supongamos que las condiciones de un cultivo son tales que las amebas se duplican aproximadamente cada hora y que, inicialmente, hay una ameba.

a. Calcula el número aproximado de amebas que habrá según pasan las horas y completa la siguiente tabla:

Tiempo	0h	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	
Número de amebas	1	2	4								

b. Realiza la representación gráfica de dicha situación.

c. Descubre una expresión funcional que la represente.

d. Cuál será el número de amebas en 12 horas?, ¿y en 16?

e. Completa ahora una tabla como la anterior pero considerando que comenzamos con 4 amebas.

Representa gráficamente dichos puntos en el mismo sistema de coordenadas de **b.**

Tiempo	0h	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	
Número de amebas	4										

f. Descubre la expresión funcional correspondiente a dicha situación.

g. ¿Cuál será el número de amebas en 14 horas?, ¿y en 24?

El tipo de funciones vistas anteriormente reciben el nombre de ***función exponencial*** que estudiaremos a continuación.

Definición:

Se define ***función exponencial*** a toda función de la forma $\boldsymbol{f(x) = k.a^x + b}$, con $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$,

Representación gráfica:

Al representar gráficamente las funciones exponenciales, se obtienen curvas crecientes o decrecientes en todo su dominio. Una característica evidente de estas funciones es la rapidez con la que crece o decrece. A este crecimiento o decrecimiento vertiginoso se lo llama crecimiento o decrecimiento exponencial.

2. Analiza y responde:

a. En la definición de la función exponencial, ¿por qué a no puede ser negativo?

b. ¿por qué a tiene que ser distinto de 1?

c. ¿por qué k no puede ser cero?

3. Representa gráficamente las siguientes funciones exponenciales y analiza en cada una de ellas:

Dominio e imagen.
Asíntota.
Raíces.
Ordenada
Crecimiento y decrecimiento.
Conjunto de positividad y negatividad.

$f_1(x) = 2^x + 1$

$f_2(x) = 3^x - 1$

$f_3(x) = -2.\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$

$f_4(x) = -2.2^x + 1$

$f_5(x) = \frac{1}{2}.2^x - 4$

$f_6(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 4$

4. Determina, en cada caso, la ecuación de la función exponencial de la forma $\boldsymbol{y = k.a^x}$ que cumple las siguientes condiciones:

a. Pasa por el punto $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$ y $k = 2$

b. $a = \frac{1}{2}$ y corta al eje y en $y = 4$

c. Pasa por los puntos $P(1; 1)$ y $Q(2; 3)$

d. Pasa por los puntos $P(0; \frac{3}{2})$ y $Q(-1; 0{,}3)$

e. Su base es $\frac{1}{3}$ y pasa por el punto $(-1; 6)$

5. Calcula todos los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes ecuaciones exponenciales:

a. $2^x = 64$

b. $10^{3+x} = 1$

c. $10^{2x+1} = 10^{3x+2}$

d. $9^{x-1} = 3^{1-x}$

e. $2^{x^2-2x+1} = 1$

f. $3^{1-x^2} = \frac{1}{27}$

g. $2^{3x} = 0{,}5^{3x+2}$

h. $4.2^{3x} = -16384$

i. $5^{x-2} + 5^x + 5^{x+2} = 651$

j. $3^x + 3^{x+2} = 810$

k. $5.2^{x-1} - \frac{1}{3}.2^{x+2} = \frac{7}{12}$

l. $5^{x+1} - 5^x = 20$

m. $3.3^{2x} - 4.3^x + 1 = 0$

n. $3^{2x} - 12.3^x + 27 = 0$

6. En un cultivo de bacterias que se producen por bipartición cada minuto, había inicialmente 10^6 de ellas.

a. Escribe la fórmula correspondiente a la función exponencial que refleja esta situación.

b. ¿Cuántas bacterias habrá a los 5 minutos?

7. Si la función exponencial $y = 30000.\,1{,}41^x$ la interpretáramos como un interés compuesto anual,

a. ¿cuál es el capital inicial?

b. ¿y el interés?

c. Al cabo de 5 años, ¿qué capital final se tendría?

8. Con el objetivo de combatir una enfermedad, un médico ha indicado a su paciente una medicación que deberá ser inyectada durante 15 días de la siguiente forma: el primer día se aplica la dosis máxima de 100 ml; cada día subsiguiente se aplicará 4/5 de la dosis correspondiente al día anterior.

a. Encuentra una función que modelice la cantidad de medicación aplicada a lo largo de los días transcurridos.

b. ¿Cuál es la dosis indicada para el día 10?

c. ¿Cuánto medicamento (en ml) se le ha inyectado al paciente el día 15?

9. A medida que el tiempo pasa, los bienes de uso, como las computadoras, los autos, etc. pierden su valor. Supongamos que un auto que hoy cuesta $10.000.000 se desprecia de tal forma que, cada año que pasa, el valor es el 95% de su valor anterior.

a. Encuentra una fórmula que devuelva el valor del auto al pasar un tiempo t expresado en años.

b. ¿Cuál será el valor del auto luego de 2 años? ¿y luego de 5 años?

c. ¿Cuál será el valor del auto luego de 14 meses?

d. ¿Cuánto dinero se ha perdido luego de 18 meses?

10. Disponemos de una muestra de 50 gramos de talio, un elemento radiactivo cuyo período de semidesintegración es de 3 minutos. Encuentra una función que modelice la situación. ¿Qué representa cada variable? ¿Cuánto quedará al cabo de media hora?

11. Halla la expresión funcional que describa el crecimiento exponencial de una colonia de 2000 bacterias que se quintuplican cada tres horas. ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de un día?

12. Halla una fórmula que describa el crecimiento exponencial de una población que aumenta el 12% cada 5 años, considerando una cantidad inicial de 55 millones de habitantes. ¿Cuántos habitantes tendrá dicha población dentro de 50 años? ¿Dentro de cuántos años la población se duplicará?

13. Se realiza un depósito a plazo fijo, a una tasa del 16% mensual. Seis meses después de colocado el dinero, el capital era de $170.547,74.

a. ¿Cuál fue el capital inicial?

b. ¿Cuál será el capital en un año?

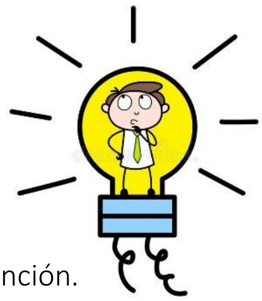
14. En una investigación científica, una población de moscas crece exponencialmente. Si después de 1 día hay 80 moscas y después de 2 días hay 128 moscas.

a. ¿Cuál es la fórmula de la función que representa el crecimiento de la población de moscas?

b. ¿Cuál era la cantidad de moscas al iniciar el conteo?

c. ¿Cuántas moscas hay después de 5 días?

AUTOEVALUACIÓN



1. Dada la función $f(x) = 3\ .\left(\frac{1}{3}\right)^{x} - 1$
   a. Halla la ecuación de su asíntota.
   b. Encuentra analíticamente $C^0(f)$ y ordenada.
   c. Buscando puntos extra, realiza la gráfica aproximada de la función.
   d. Detalla sobre $f(x)$: dominio, imagen, intervalo de crecimiento y conjunto de positividad.

2. Encuentra la expresión de $g(x) = k.a^x$ sabiendo que la misma pasa por los puntos $A = (1; 25)\ y\ B = (3; 9)$

3. Se sabe que un plazo fijo tiene un tasa de 22% anual. Si sabe que se deposita un capital de 13000 \$.
   a. Encuentra una función que determine el dinero que devuelve el plazo fijo a lo largo del tiempo, especificando que representa cada variable (x e y)
   b. ¿En cuánto se convierte ese dinero al cabo de 5 años?
   c. ¿Cuánta plata devolverá el plazo fijo a los 3 meses?

4. La población de un pueblo está disminuyendo. Según los datos obtenidos, decrece un 15% cada 3 años. Teniendo una población inicial de 39500 habitantes:

   a. Encuentra una función que modelice dicha situación, detallando que representa cada una de las variables que intervienen.

   b. ¿Cuál será la población luego de transcurridos 10 años?

5. Encuentra en cada caso el conjunto solución.

   a. $4.2^{2x} - \frac{33}{2}.2^{x+1} = -8$

   b. $27^{2x+5} = 3^{4x-10}$

   c. $9^x + 26.3^{x-2} = \frac{1}{3}$

   d. $2.5^{x+2} - 3.5^{x-1} = 1235$

   e. $2^{x+1} - 2^{x-3} + 2^x = 23$

   f. $2^{1-x^2} = 0{,}125$

   g. $4^{x+1} + 4^{x+2} - 320 = 0$

Respuestas

3. $Dom\ f_1 = \mathbb{R}$

   $Im\ f_1 = (1; \infty)$

   $Asíntota\ horizontal\ en\ y = 1$

   $C^0(f_1) = \emptyset$

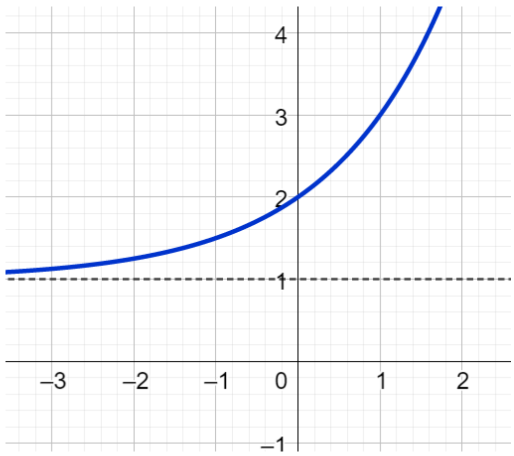
   $f_1(0) = 2$

   $IC(f_1) = \mathbb{R}$

   $ID(f_1) = \emptyset$

   $C^+(f_1) = \mathbb{R}$

   $C^-(f_1) = \emptyset$



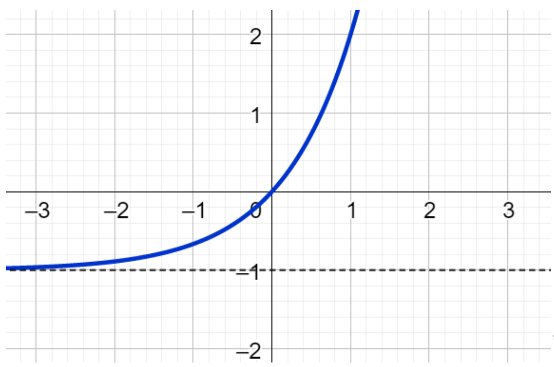
   $Dom\ f_2 = \mathbb{R}$

   $Im\ f_2 = (-1; \infty)$

   $Asíntota\ horizontal\ en\ y = -1$

   $C^0(f_2) = \{0\}$

   $f_2(0) = 0$



$IC(f_2) = \mathbb{R}$

$ID(f_2) = \emptyset$

$C^+(f_2) = (0; \infty)$

$C^-(f_2) = (-\infty; 0)$

$Dom\ f_3 = \mathbb{R}$

$Im\ f_3 = (-\infty; -2)$

$Asíntota\ horizontal\ en\ y = -2$

$C^0(f_3) = \emptyset$

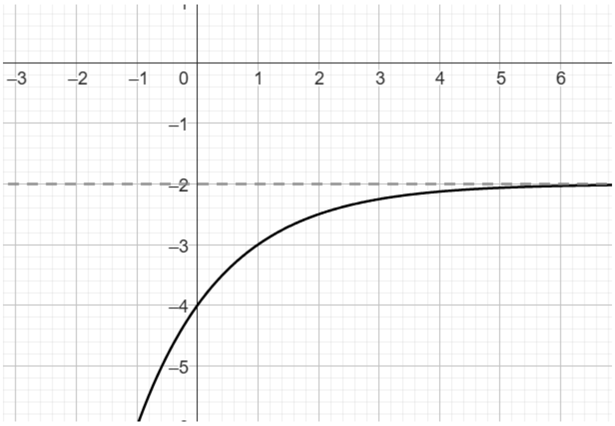
$f_3(0) = -4$

$IC(f_3) = \mathbb{R}$

$ID(f_3) = \emptyset$

$C^+(f_3) = \emptyset$

$C^-(f_3) = \mathbb{R}$



$Dom\ f_4 = \mathbb{R}$

$Im\ f_4 = (-\infty; 1)$

$Asíntota\ horizontal\ en\ y = 1$

$C^0(f_4) = \{-1\}$

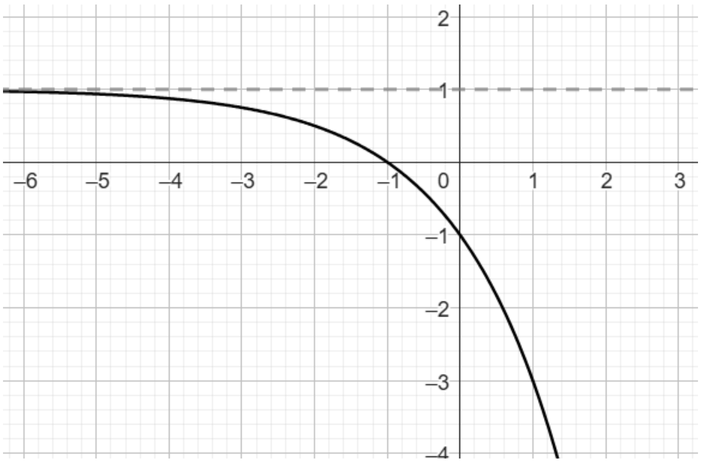
$f_4(0) = -1$

$IC(f_4) = \emptyset$

$ID(f_4) = \mathbb{R}$

$C^+(f_4) = (-\infty; -1)$

$C^-(f_4) = (-1; \infty)$



$Dom\ f_5 = \mathbb{R}$

$Im\ f_5 = (-4; \infty)$

$Asíntota\ horizontal\ en\ y = -4$

$C^0(f_5) = \{3\}$

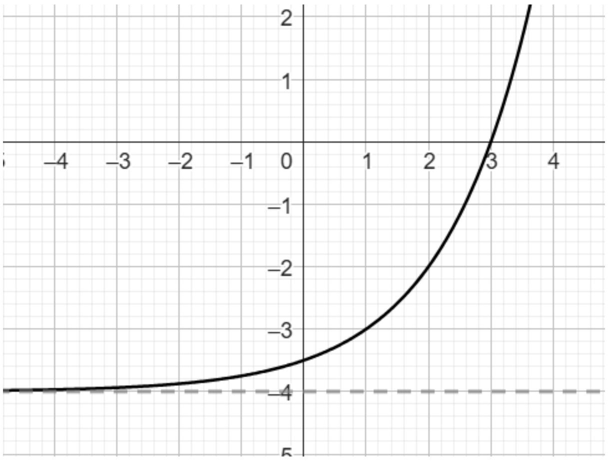
$f_5(0) = -3{,}5$

$IC(f_5) = \mathbb{R}$

$ID(f_5) = \emptyset$

$C^+(f_5) = (3; \infty)$

$C^-(f_5) = (-\infty;\ 3)$



$Dom\ f_6 = \mathbb{R}$

$Im\ f_6 = (-4; \infty)$

$Asíntota\ horizontal\ en\ y = -4$

$C^0(f_6) = \{-2\}$

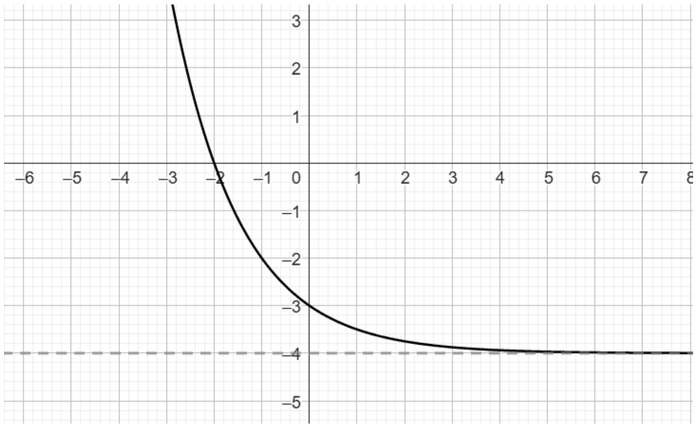
$f_6(0) = -3$

$IC(f_6) = \emptyset$

$ID(f_6) = \mathbb{R}$

$C^+(f_6) = (-\infty; -2)$

$C^-(f_6) = (-2; \infty)$



4.

a. $y = 2.\left(\frac{4}{3}\right)^x$

b. $y = 4.\left(\frac{1}{2}\right)^x$

c. $y = \frac{1}{3}.3^x$

d. $y = \frac{3}{2}.5^x$

e. $y = 2.\left(\frac{1}{3}\right)^x$

5.

a. $S = \{6\}$

b. $S = \{-3\}$

c. $S = \emptyset$

d. $S = \{1\}$

e. $S = \{-1\}$

f. $S = \{-2; 2\}$

g. $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

h. $S = \{1\}$

i. $S = \{2\}$

j.	$S=\{4\}$	k.	$S=\{-1\}$	l.	$S=\{1\}$
m.	$S=\{-1;0\}$	n.	$S=\{1;2\}$		

6. a. $f(x)=10^6.2^x$ b. 32000000 bacterias

7. a. 30.000$ b. 41% anual c. 167.192,51$

8. a. $f(x)=100.\left(\frac{4}{5}\right)^x$ b. 10,73 ml c. $3{,}51\ ml$

9. a. $f(t)=10.000.000.0{,}95^t$

   b. 9.025.000$ / 7.737.800 $

   c. 9419131.7$

   d. 740.540$

10. $f(x)=50.0{,}793^x$ $x: tiempo\ en\ minutos$ $f(x)=gr\ de\ talio\ que\ quedan$

11. $f(t)=2000.1{,}709^x$ t: tiempo en horas $f(t)$ = cantidad de bacterias

    770.618.624 bacterias

12. $f(x)=55000000.1{,}023^x$ x:tiempo en años $f(x)$: cantidad de habitantes

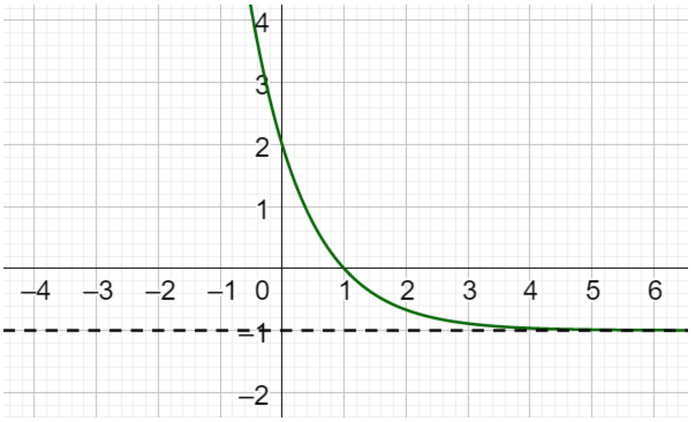
    171.452.718 Después de 30 años

13. a. Aproximadamente $70.000 b. $415.521

14. a. $f(x)=50\ .1{,}6^x$ b. 50 moscas c. 524 moscas

RESPUESTAS AUTOEVALUACIÓN

1. Dada la función $f(x) = 3\ .\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$



a. $y = -1$

b. $C^0(f) = \{1\}$ $\quad f(0) = 2$

d. $Dom\ f = \mathbb{R}$ $\quad Im\ f = (-1;\infty)$

$IC\ f = \emptyset$ $\quad C^+f = (-\infty;1)$

2. $g(x) = \frac{125}{3}.\left(\frac{3}{5}\right)^x$

3. a. $f(x) = 13000\ .\ 1{,}22^x$ $\quad x$: tiempo en años $\quad f(x)$: dinero que devuelve el plazo fijo

b. 35135,2 $

c. 13662,59 $

4. a. $f(x) = 28500\ .\ 0{,}958^x$

b. 18556 habitantes

5) Encuentra en cada caso el conjunto solución.

a. $S = \{-2;3\}$ $\quad$ b. $S = \left\{-\frac{25}{2}\right\}$

c. $S = \{-2\}$ $\quad$ d. $S = \{2\}$

e. $S = \{3\}$ $\quad$ f. $S = \{-2;2\}$

g. $S = \{2\}$